Module LI348 : examen juin 2007.

Durée 2h00. Notes de cours et de TD autorisées.

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs

Exercice 1 (5 points)

On considère l'énoncé du problème de flot maximum du sommet source $s = 1$ vers le puits $p = 10$ représenté sur la figure 1. L'étiquette $b(u), f(u)$ d'un arc u est composée de sa capacité maximale $b(u)$ et de la valeur $f(u)$ du flux d'un flot f.

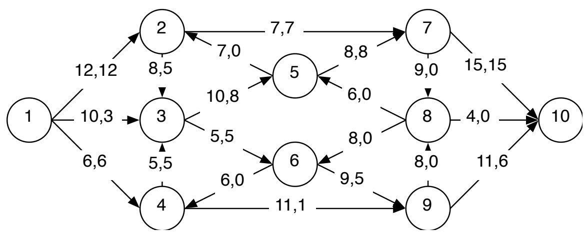

Figure 1: Un énoncé d'un problème de flot maximum et un flot initial

Question 1 (1/5) — Déterminer le graphe d'écart G_f du flot f.

Le graphe d'écart G_f est représenté sur la figure 2.

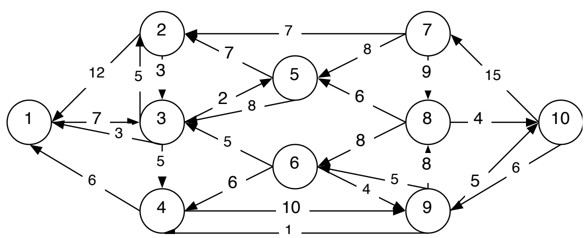

Figure 2: Le graphe d'écart G_f

Question 2 (1/5) — Déterminer une fonction distance estimée au puits pour les sommets de G_f.

La fonction distance (valeurs en gras à côté des sommets) et les arcs compatibles (en gras pointillé) est obtenue à partir d'un parcours en largeur à partir du sommet puits sur le graphe inversé (voir figure 3).

Question 3 (3/5) — Utiliser l'algorithme de la distance estimée au puits à partir du flot initial de la question 1 pour déterminer un flot maximum du sommet $s = 1$ au sommet $p = 10$ (on donnera le graphe d'écart et la fonction distance associés à chaque itération).

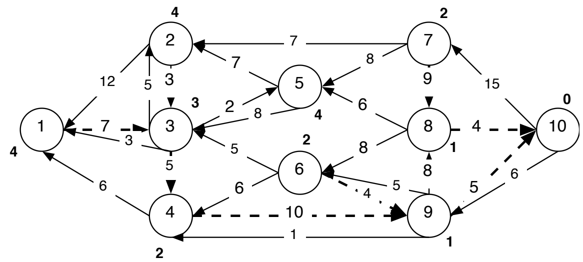

Figure 3: Fonction distance et arcs compatibles

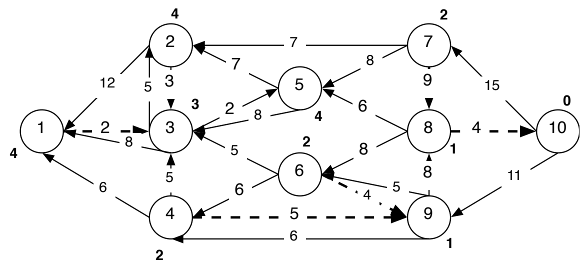

Figure 4: Graphe d'écart après la première augmentation de flot

Le nouveau graphe d'écart obtenu après la première augmentation de flot (valeur 5) est représenté sur la figure 4. les itérarions suivantes sont des augmentations de distance: sommet 3: nouvelle distance 5 ; sommet 1: nouvelle distance 6; sommet 5: nouvelle distance 6; sommet 3: nouvelle distance 7; sommet 1: nouvelle distance 8; sommet 5: nouvelle distance 8; sommet 3: nouvelle distance 9; sommet 1: nouvelle distance 10. L'algorithme se termine pour le flot optimal dont le graphe d'écart est celui de la figure 4

Exercice 2 (17 points)

On considère le cas particulier du problème de transport où chaque fournisseur $F_i, i \in \{1, \cdots, m\}$ peut livrer directement chaque demandeur $D_j, j \in \{1, \cdots, n\}$. Dans la suite on notera F l'ensemble $\{F_1, \cdots, F_m\}$ et D l'ensemble $\{D_1, \cdots, D_n\}$. Le réseau de transport est donc un graphe biparti complet $(F \cup D, A)$ où A est constitué des $m \times n$ couples (F_i, D_j). On note a_i la disponibilité de F_i, b_j la demande de D_j et c_{ij} le coût unitaire de transport de F_i vers D_j. On suppose de plus que la disponibilté totale est égale à la demande totale, c'est-à-dire que $\sum_{i\in\{1,\cdots,m\}} a_i = \sum_{j\in\{1,\cdots,n\}} b_j$. Le but de l'exercice est de proposer un algorithme spécifique pour ce cas particulier de problème de transport. Dans la suite, les différentes étapes de l'algorithme seront illustrées sur la donnée représentée par le tableau suivant où le coût c_{ij} figure à l'intersection de la ligne F_i et de la colonne D_j.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
F_1	10	20	5	9	10	9
F_2	2	10	8	30	6	4
F_3	1	20	7	10	4	8
b_j	3	5	4	6	3	

Question 1 (1/17) — Si l'on note x_{ij} la quantité transportée sur l'arc (F_i, D_j), montrer qu'une solution optimale correspond à la résolution du programme linéaire PL suivant:

$$PL \begin{cases} \sum_{D_j\in D} x_{ij} = a_i & \forall F_i \in F \\ \sum_{F_i\in F} x_{ij} = b_j & \forall D_j \in D \\ x_{ij} \geq 0 & \forall (F_i, D_j) \in F \times D \\ \min \sum_{(F_i,D_j)\in F\times D} c_{ij}x_{ij} & \end{cases}$$

Les contraintes de la première ligne expriment que la disponibilité totale de chaque fournisseur doit être livrée aux demandeurs. Les contraintes de la deuxième ligne expriment que la demande totale de chaque demandeur doit être satisfaite. Les contraintes de la troisième ligne expriment que les quantités transportées sont positives ou nulles. La fonction économique correspond au coût d'un plan de transport x.

Question 2 (2/17) — Montrer que le programme linéaire dual PLD de PL où u_i est la variable duale associée à l'égalité $\sum_{D_j\in D} x_{ij} = a_i$ et où v_j est la variable duale associée à l'égalité $\sum_{F_i\in F} x_{ij} = b_j$ s'écrit :

$$PLD \begin{cases} u_i + v_j \leq c_{ij} & \forall (F_i, D_j) \in F \times D \\ \max \sum_{F_i\in F} a_iu_i + \sum_{D_j\in D} b_jv_j & \end{cases}$$

Dans la colonne i_0, j_0 de la matrice de PL, il y a un 1 sur la ligne associée à la contrainte $\sum_{D_j\in D} x_{i_0j} = a_{i_0}$ (variable duale associée u_{i_0}), un 1 sur la ligne associée à la contrainte $\sum_{F_i\in F} x_{ij_0} = b_{j_0}$ (variable duale associée v_{j_0}) et de 0 partout ailleurs. Les variables duales sont non signées car les contraintes primales sont des égalités.

Question 3 (2/17) — Utiliser le théorème des écarts complémentaires pour déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution x de PL et une solution u, v de PLD soient optimales.

$$\boxed{\forall (F_i, D_j) \in F \times D,\, x_{ij}(u_i + v_j - c_{ij}) = 0}$$

Question 4 (3/17) — Soit H un arbre couvrant de R (considéré comme un sous-ensemble de couples de $F \times D$). H est appelé arbre-solution si le système $S(H)$ suivant possède une solution :

$$S(H) \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{(F_i,D_j)\in H} z_{ij} = a_i & \forall F_i \in F \\ \sum_{(F_i,D_j)\in H} z_{ij} = b_j & \forall D_j \in D \\ z_{ij} \geq 0 & \forall (F_i, D_j) \in H \end{array} \right.$$

Montrer que si $S(H)$ possède une solution, alors cette solution est unique.
En déduire que si $S(H)$ possède une solution, alors la valeur de x définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{ij} = z_{ij} & \text{si } (F_i, D_j) \in H \\ x_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

est une solution réalisable de PL.

H possède au moins un arc (i,j) pendant et la valeur de z pour cet arc est définie de manière unique. On peut alors itérer ce raisonnement sur l'arbre obtenu en supprimant (i,j). Evident puisque $\sum_{(F_i,D_j)\in I\times J} x_{ij} = \sum_{(F_i,D_j)\in H} z_{ij} = a_i$ et $\sum_{(F_i,D_j)\in I\times J} z_{ij} = \sum_{(F_i,D_j)\in H} z_{ij} = b_j$.

Déterminer la solution de PL associée à l'arbre couvrant H défini par les arcs en pointillé de la figure 5 pour l'exemple numérique initial.

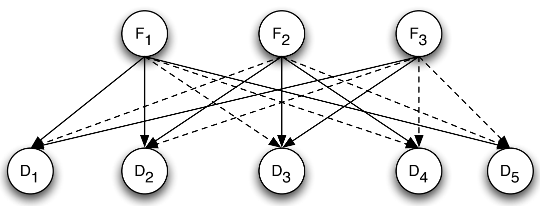

Figure 5: Un arbre-solution

$$\boxed{\text{Voir figure 6}}$$

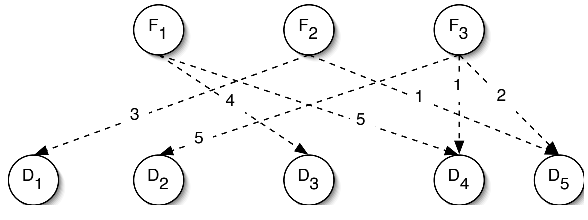

Figure 6: solution x associée à H

Question 5 (3/17) — Soit H un arbre-solution. Les valeurs de u, v associées à H sont définies comme les solutions du système $T(H)$ suivant :

$$T(H) \left\{ \begin{array}{ll} u_i + v_j = c_{ij} & \forall (F_i, D_j) \in H \\ u_1 = 0 & \end{array} \right.$$

Montrer que la solution de $T(H)$ existe et est unique.

Les valeurs de u, v sont définies de manière unique sur chacun des sommets voisins de F_1. On supprime alors F_1 et les arcs incidents à F_1 et l'on itére le raisonnement sur chaque sous-arbre restant.

Déterminer pour l'exemple numérique initial, les valeurs de u, v associées à l'arbre-solution H de la figure 5.

Voir figure 7 (les étiquettes des arcs sont les coûts unitaires)

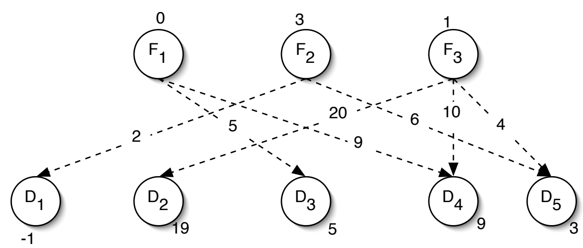

Figure 7: solution u, u associée à H

Montrer, dans le cas général, que les valeurs de u, v associées à H et la solution x de PL associée à H satisfont la condition de la question 3.
En déduire que si les valeurs de u, v constituent une solution de PLD, alors x est une solution optimale.

Pour la solution primale x et la solution u, v associées à H, on a : si x_{ij} n'est pas nul, alors $(i, j) \in H$ et $u_i + v_j = c_{ij}$. Les conditions de la question 3 sont donc satisfaites.

Question 6 (3/17) — On suppose qu'il existe un arc (F_{i_0}, D_{j_0}) non dans H tel que $u_{i_0} + v_{j_0} > c_{i_0 j_0}$. On note alors $C = (F_{i_0}, D_{j_0}, F_{i_1}, D_{j_1}, \cdots, F_{i_p}, D_{j_p}, F_{i_0})$ la liste des sommets du cycle associé à l'ajout de l'arc (F_{i_0}, D_{j_0}) dans H. On pose alors :

$$\Delta = x_{i'j'} = \min(x_{i_1 j_0}, x_{i_2 j_1}, \cdots, x_{i_p j_{p-1}}, x_{i_0 j_p}).$$

et l'on définit x' par :

$$x'_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} x_{ij} & \text{si } C \text{ ne passe pas par l'arc } (F_i, D_j), \\ x_{ij} + \Delta & \text{si } (i,j) = (i_k, j_k) \text{ pour } k \in \{0, \cdots, p\}, \\ x_{ij} - \Delta & \text{si } (i,j) = (i_{k+1}, j_k) \text{ pour } k \in \{1, \cdots, p-1\} \text{ ou } (i,j) = (i_0, j_p) \end{array} \right.$$

Montrer que :

1. $H' = H \setminus \{(F_{i'}, D_{j'})\} \cup \{(F_{i_0}, D_{j_0})\}$ est un arbre couvrant de R,
2. x' est une solution réalisable de PL,
3. pour tout (i, j) non dans H', $x'_{ij} = 0$.

H', qui est connexe et possède $n + m - 1$ arcs est un arbre couvrant. x' est réalisable puisque d'une part x'_{ij} est positif ou nul par définition de Δ et d'autre part en chaque sommet du cycle, la somme des quantités transportées reste la même. Si $(i, j) \neq (i', j')$ et (i, j) est ni dans H ni dans H' alors $x'_{ij} = x_{ij} = 0$. Si $(i, j) = (i', j')$, on a aussi $x'_{ij} = 0$ par définition de Δ.

Déterminer C, Δ, H' et x' pour l'arbre-solution H de la figure 5 et l'arc $(F_{i_0}, D_{j_0}) = (F_2, D_2)$.

voir figure 8.

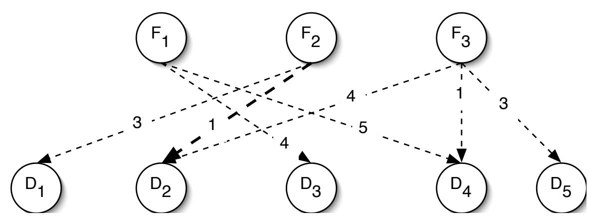

Figure 8: cycle C, arbre H' et nouvelle solution primale x'

Question 7 (2/17) — En utilisant l'égalité $u_i + v_j = c_{ij}$ pour tous les arcs du cycle C (sauf l'arc (F_{i_0}, D_{j_0})), montrer que :

$$cx' - cx = \Delta(c_{i_0 j_0} - u_{i_0} - v_{j_0}).$$

En déduire que si $\Delta > 0$, alors x' est une solution strictement meilleure que x.

Considérons comme sens de parcours du cycle celui de l'arc (F_{i_0}, D_{j_0}). Soit C^+ l'ensemble des arcs de C parcourus dans le sens direct. Soit C^- l'ensemble des arcs de C parcourus dans le sens indirect. On a : $cx' - cx = \Delta(\sum_{C^+} c_{ij} - \sum_{C^-} c_{ij})$. Ecrivons les égalités $u_i + v_j = c_{ij}$ pour les arcs de C^+ distincts de (F_{i_0}, D_{j_0}) et les égalités $-u_i - v_j = -c_{ij}$ pour les arcs de C^-. En sommant ces égalités, il vient $u_{i_0} + v_{j_0} = c_{i_0 j_0} + \sum_{C^+} c_{ij} - \sum_{C^-} c_{ij}$. Il en résulte que : $cx' - cx = \Delta(u_{i_0} + v_{j_0} - c_{i_0 j_0})$.

Question 8 (1/17) — Donner un algorithme $TRANS(m, n, a, b, c, H)$ qui, à partir d'une donnée (m, n, a, b, c) d'un problème de transport et d'un arbre-solution initial H détermine un plan de transport de coût minimum.

$TRANS(m, n, a, b, c, H)$;
$K := H$;
Déterminer la solution primale x et le couple u, v associés à K;
Tant qu'il existe un arc (F_i, D_j) non dans K tel que $u_i + v_j > c_{ij}$ faire
Déterminer le cycle C associé à l'ajout de (F_i, D_j) dans K;
Déterminer Δ et K';
$K := K'$;
FinTantque.