TD 3
Algorithme du Simplexe
Analyse approfondie

Exercice 1 : Méthode des deux-phases

On considère le programme linéaire suivant :

$$(P)\quad\begin{cases} min\ z = & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \geq & 5 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 1 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1,3\} & & & \end{cases}$$

Question 1 : Que peut-on dire de la base formée par les variables d'écart ?
Question 2 : Ecrire le programme auxiliaire noté (P_0) associé à (P) pour déterminer une base primale réalisable ?
Question 3 : Résoudre le programme P_0.
Question 4 : Peut-on trouver une solution réalisable pour le programme (P) ?
Question 5 : Résoudre le programme (P).

Exercice 2 : Résolution de programmes linéaires par la méthode des deux phases

Résoudre les programmes linaires suivants:

- $$(P_1)\quad\begin{cases} max\ z = & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1,2\} & \end{cases}$$

- $$(P_2)\quad\begin{cases} max\ z = & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1,2\} & \end{cases}$$

- $$(P_3)\quad\begin{cases} max\ z = & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1,2\} & \end{cases}$$

Exercice 3 : Dégénérescence et cyclage

Question 1 : Identifier lors de la résolution du programme linéaire suivant par la méthode du simplexe les itérations dégénérées.

$$(P)\quad \begin{cases} max\ z = & 2x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & & \\ & & & & + & 2x_3 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 2 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1,3\} & & & \end{cases}$$

Question 2 : Quel problème peut apparaître lorsqu'il y a dégénérescence ? Comment peut-on l'éviter ?

Question 3 : Prouver que si la méthode du simplexe ne se termine pas alors il y a cyclage.

Exercice 4 : Interprétation géométrique de la dégénérescence

Résoudre le programme linéaire suivant et caractériser graphiquement les différentes étapes de la méthode du simplexe.

$$(P)\quad \begin{cases} min\ z = & -x_1 & + & x_2 & & \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1,2\} & \end{cases}$$