

TD 2
Programmation linéaire
Algorithme du Simplexe

Exercice 1 : Conditions nécessaires et suffisantes

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour s et t de façon à ce que le programme linéaire suivant:

$$\begin{cases} \max z = & x_1 & + & x_2 \\ & sx_1 & + & tx_2 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in \{1, 2\} \end{cases} \leq 1$$

- possède une solution optimale
- soit non-réalisable
- soit non-borné

Exercice 2 : Industrie Pharmaceutique

Une industrie pharmaceutique a le choix de produire 4 sortes de médicaments pour soigner une maladie rénale. La fabrication de chaque médicament donne un profit mais produit également des déchets toxiques dont les pourcentages dépendent de la quantité fabriquée. Dans le tableau suivant, $a(i, j)$ représente la quantité en kilogrammes de déchet i produit par la fabrication de 100 kg du médicament j . On donne également le profit en francs par kilogramme du médicament j .

Médicament		M_1	M_2	M_3	M_4
toxique	T_1	20	20	10	40
	T_2	10	30	20	0
	T_3	20	40	30	10
profit		15	60	4	20

Les réglementations en vigueur limitent la production maximale des déchets toxiques T_1 , T_2 et T_3 à 21, 6 et 14 kg respectivement par semaine. Calculer les productions par semaine de façon à respecter les restrictions tout en maximisant le profit.

Exercice 3 : Méthode du simplexe

Résoudre les problèmes de programmation linéaire suivants par la méthode du simplexe:

$$1. \quad \begin{cases} \max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 & \\ & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 & \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, \dots, 3\} & & & & \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \max z = & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 8x_4 & & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 5 & \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 & \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, \dots, 4\} & & & & & & \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \max z = & 2x_1 & + & x_2 & & & & & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 3 & \\ & x_1 & + & 5x_2 & & & \leq & 1 & \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 4 & \\ & 4x_1 & + & x_2 & & & \leq & 5 & \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, 2\} & & & & \end{cases}$$

Exercice 4 : Analyse de sensibilité

Soit le problème de production de 2 biens à partir de 2 services suivant :

$$\begin{cases} \max z = & 5x_1 & + & 6x_2 & & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 48 & \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 120 & \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, 2\} & & \end{cases}$$

L'optimum est donné par :

$$\begin{array}{rcc} & -x_4 & -x_2 \\ z = & 200 & 5/3 & 2/3 \\ x_3 = & 8 & -1/3 & 2/3 \\ x_1 = & 40 & 1/3 & 4/3 \end{array}$$

Trouver le nouvel optimum si le coefficient $c_2 = 6$ devient $c_2 = 8$;