

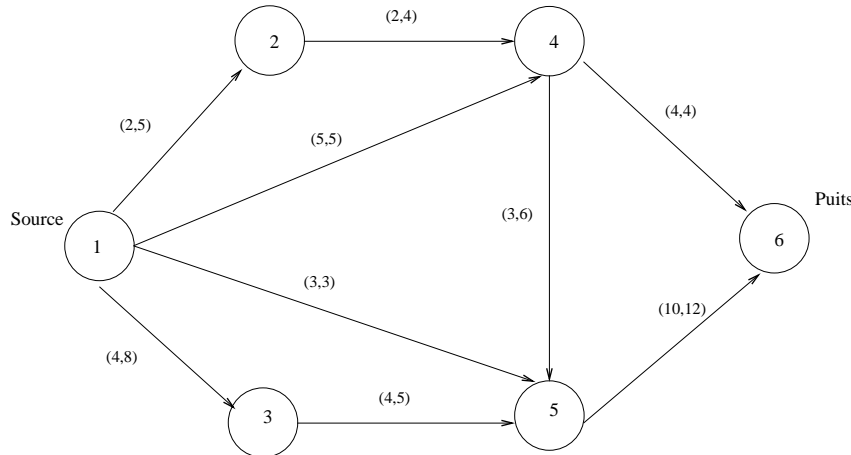
## TD 6

### Flots de valeur maximale

#### Exercice 1 : Graphe d'écart - Algorithme de Ford-Fulkerson

On considère le réseau représenté à la figure ci-dessous. Le couple  $(f_{ij}, c_{ij})$  représente respectivement le flot  $f$  et la capacité de l'arc  $(i, j)$ .

**Question 1 :** Définir et représenter le graphe d'écart associé à  $f$ .



**Question 2 :** Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour déterminer la valeur du flot maximum.

**Question 3 :** Spécifier la coupe minimum associée à la terminaison de l'algorithme.

#### Exercice 2 : Réseau commercial

Une société de vente par correspondance gère un réseau commercial et logistique composé de :

- trois centres de prise de commandes  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ;
- deux centres de préparation de commandes  $P_j$  ( $j = 1, 2$ ) ;
- deux centres de distribution  $D_k$  ( $k = 1, 2$ ).

Cette société désire évaluer la capacité mensuelle du réseau (nombre maximum de commandes pouvant être prises, préparées et livrées en un mois). Le réseau possède les caractéristiques suivantes (en milliers de commandes par mois) :

- les capacités de prise de commandes de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont respectivement de 30, 30 et 10 ;
- les capacités de préparation de commandes de  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement de 10 et 60 ;

- les capacités de distribution de  $D_1$  et  $D_2$  sont respectivement de 30 et 50 ;
- chaque centre de prise de commandes peut alimenter les 2 centres de préparation, mais les capacités des liaisons informatiques limitent à un maximum de 20000 commandes par mois le flux entre un centre  $C_i$  et un centre  $P_j$  ;
- $P_1$  alimente uniquement  $D_1$  ;  $P_2$  alimente uniquement  $D_2$  ;
- $D_2$  a la possibilité de transférer une partie de son activité sur  $D_1$  ; ce transfert ne peut dépasser 20000 commandes par mois, il ne réduit pas la capacité de distribution de  $D_2$  ;
- parmi les clients de la société, les collectivités ne s'adressent qu'à  $C_3$  ; il y a un minimum de 5000 commandes mensuelles de ce type.

**Question 1 :** Construire (en le justifiant) le réseau de transport modélisant le contexte.

**Question 2 :** Définir le nombre maximum de commandes que la société peut traiter mensuellement. (On pourra partir d'un flot initial nul)

Traduire le flot obtenu en termes d'activité pour chaque centre.

**Question 3 :** Identifier une coupe de capacité minimale.

### Exercice 3 : Allocation de tâches

On s'intéresse à la modélisation d'un problème d'allocation de tâches correspondant aux procédures d'un programme à deux processeurs en minimisant le coût total de communication entre processeurs et le coût d'exécution de ces procédures.

Le coût d'exécution de la procédure  $i$  sur le processeur 1 (respectivement 2) est défini par  $\alpha_i$  (respectivement  $\beta_i$ ) . Les coûts de communication sont donnés par  $c_{ij}$  si  $i$  et  $j$  sont affectées à des processeurs différents. Nous supposons de plus que 4 procédures doivent être affectées. Les coûts sont définis dans les tableaux ci-dessous :

$i$	1	2	3	4
$\alpha_i$	6	5	10	4
$\beta_i$	4	10	3	8

$c_{ij}$	1	2	3	4
1	0	5	0	0
2	5	0	6	2
3	0	6	0	1
4	0	2	1	0

**Question 1 :** Formuler ce problème sous-forme de problème de flot maximum dans un graphe que vous définirez.

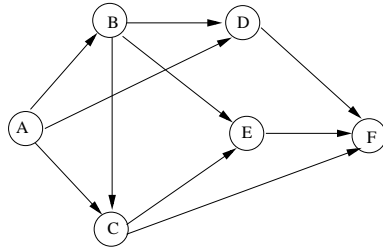
**Question 2 :** Définir le coût d'une affectation par rapport à une coupe du graphe ainsi que le coût minimum d'une affectation.

---

### Exercice 4 : Recherche de chemins disjoints dans un graphe

---

Soit le graphe  $G$  ci-dessous. Quel est dans ce graphe le nombre maximal de chemins disjoints au sens des sommets de  $A$  à  $F$  que l'on peut trouver (un sommet différent de  $A$  et  $F$  appartient au plus à un des chemins retenus)?




---

### Exercice 5 : Graphe d'évacuation

---

On considère un graphe symétrique  $G = (S, A)$  ayant  $n$  sommets et deux sous-ensembles  $X$  et  $Y$  de  $S$  (non nécessairement disjoints); les éléments de  $X$  sont les places et les éléments de  $Y$  sont les issues.

Un plan d'évacuation est un ensemble de chemins dans le graphe tel que deux d'entre eux n'ont pas de sommet commun et ou chacun d'eux mène d'une place à une issue.

Déterminer un plan d'évacuation optimal consiste à trouver un plan d'évacuation contenant le maximum de chemins.

Un problème de flot avec contraintes sur les sommets est un problème de flot classique auquel on ajoute des contraintes supplémentaires définies par un ensemble de nombres  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , la somme des flots entrants en  $x_i$  doit être inférieure à  $s_i$ .

**Question 1 :** Montrer que la détermination d'un plan d'évacuation optimal peut se ramener à un problème de flot avec contraintes sur les sommets.

**Question 2 :** Montrer que cette nouvelle contrainte peut se traduire par des contraintes portant uniquement sur des capacités d'arcs pour un autre graphe dont on précisera la construction.

**Question 3 :** En déduire un algorithme de recherche d'un plan d'évacuation optimal.