TD 4
Programmation linéaire - Dualité

Exercice 1 : Problème de mélange

Une entreprise chimique veut disposer des produits A et B contenant des éléments I, II et III en pourcentages donnés par le tableau ci-dessous. Elle peut créer des mélanges de produits ayant des contenus minimaux prescrits d'éléments I, II et III.

		A	B	besoin (en kg)
élément	I	20	40	7
	II	30	50	2
	III	30	10	5
prix (par kg) du produit		10	5	

Question 1 : Calculer les quantités de produits A et B à mélanger pour satisfaire au prix minimum les besoins en éléments I, II et III donnés dans le tableau.
Question 2 : Formuler le dual de ce problème, l'interpréter et vérifier le théorème des écarts complémentaires. Retrouver les valeurs des variables duales dans le tableau du simplexe.

Exercice 2 : Planification de la production

On considère un problème d'atelier dans lequel 4 machines (M_i avec $i = 1, \cdots, 4$) fabriquent en série 5 types de produits (P_j avec $j = 1, \cdots, 5$). La machine M_i possède une capacité maximum de d_i unités de temps. La fabrication d'une unité de produit P_j nécessite l'utilisation de la machine M_i durant t_{ij} unités de temps. Le gain relatif à la production d'une unité du produit P_j est défini par c_j. Il s'agit de maximiser le gain total relatif à cette production. Les données de l'atelier sont les suivantes:

- $c_j = (100, 75, 50, 25, 50)$
- $d_j = (500, 800, 700, 900)$
- $t_{ij} = \left\{ \begin{array}{ccccc} 4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right\}$

Question 1 : Modéliser le problème. On définira les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes du problème.
Question 2 : Modéliser ce problème en supposant qu'il y a m machines et n produits.
Question 3 : Que représente les valeurs optimales des variables d'écart associées à chacune des contraintes.

Question 4 **:** Ecrire le problème dual de ce problème pour $m = 4$ et $n = 5$.
Question 5 **:** Donner une interprétation économique des variables, contraintes et de la fonction objectif du problème dual.

Exercice 3 : Média-planning

Une agence de publicité se voit confier pour l'année à venir un budget de 5 millions d'Euros pour financer la campagne de publicité d'un produit de grande consommation sur le marché national.
Cette agence décide d'utiliser simultanément un réseau d'affichage publicitaire, trois quotidiens d'information ($Q1$, $Q2$, $Q3$), deux hebdomadaires ($H1$, $H2$), deux stations de radios ($R1$, $R2$), une régie de publicité télévisée et une chaîne de distribution de films. On s'intéresse à l'ordre de grandeur des budgets affectés à chacun des dix supports choisis pour obtenir une efficacité maximale de l'investissement publicitaire global.
Pour mesurer cette efficacité on dispose de cœfficients par type de support définis dans le tableau ci-dessous. On décrit également les seuils minimum et maximum d'admissibilité de l'investissement (en milliers d'Euros). Le cœfficient multiplié par le montant total investi dans le support (exprimé en milliers d'Euros) représente l'augmentation du chiffre d'affaires (en pourcentage) dans le trimestre qui suit la campagne publicitaire.

Support	Cœf.	Seuil Min.	Seuil Max.
Affichage	2/1000	200	1000
Presse	3/1000	300	1500
Radio	4/1000	500	2000
Télévision	5/1000	600	3000
Cinéma	1/1000	300	600

Table 1: Efficacité des différents supports

Question 1 **:** Définir les 10 variables de décision de ce problème.
Question 2 **:** Exprimer la fonction objectif et préciser sa signification.
Question 3 **:** Outre les contraintes liées à la spécification du problème, il faut respecter les contraintes suivantes:

- le tirage de $Q1$ doit être $\geq$ tirage de $Q2 \geq$ tirage de $Q3$ pour les quotidiens et le tirage de $H1$ doit être $\geq$ tirage de $H2$ pour les hebdomadaires ;
- le budget consacré à $Q3$ ne peut être inférieur à 50% de celui consacré à $Q1$;
- le budget alloué à la télévision doit être au moins le double de celui alloué à la presse écrite ;
- pour la radio, le budget de $R1$ doit être exactement 50% plus élevé que celui de $R2$.

Décrire toutes les contraintes du problème.
Question 4 **:** Ecrire le problème dual.
Question 5 **:** Donner une interprétation économique de la fonction objectif du problème dual.

Exercice 4 : Ecarts complémentaires

Soit le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} min\ z = & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & + & 5x_2 & + & 3x_3 & \geq & 2 \\ & & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 1 \\ & & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, \dots 3\} & & & \end{cases}$$

La solution optimale du problème est $(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, calculer la solution optimale du problème dual.

Exercice 5 : Résolution

Question 1 : Résoudre par la méthode du simplexe le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} max\ z = & 12x_1 & + & 15x_2 & & \\ & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 10 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, 2\} & \end{cases}$$

Question 2 : Exprimer le problème dual du problème précédent.
Question 3 : Déterminer la solution du problème dual en utilisant le théorème des écarts complémentaires.

Exercice 6 : Programmation linéaire - Dualité

Soit le problème de programmation linéaire (P) suivant:

$$\begin{cases} max\ z = & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\ & 6x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 25 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & \leq & 20 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, 3\} & & & \end{cases}$$

La solution optimale est associée à:

$$\begin{cases} x_1 & - & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 & = & \frac{5}{3} \\ x_2 & + & x_3 & - & \frac{1}{5}x_4 & + & \frac{2}{5}x_5 & = & 3 \\ z & + & 2x_2 & + & \frac{1}{5}x_4 & + & \frac{3}{5}x_5 & = & 17 \end{cases}$$

Question 1 : Donner la solution optimale. Préciser les variables de base et les variables hors-base.
Question 2 : Formuler le problème dual associé au problème (P).

Question 3 : Supposons que le problème devienne :

$$\left\{\begin{array}{lccccccc} \max\ z = & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ & 6x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 25 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 20 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1,3\} & & & \end{array}\right.$$

Utiliser la théorie de la dualité pour vérifier si la solution optimale du problème (P) reste optimale. Jusitifier.