TD 8
Flots de valeur maximale
Algorithme du préflot

Exercice 1 : Programmation linéaire - Dualité

Etant donné un graphe orienté G avec capacités sur les arcs données par une fonction positive c, un sommet source s et un sommet destination t, on souhaite trouver un flot de s à t de valeur maximale.

Question 1 : Proposer une formulation mathématique sous forme de problème de programmation linéaire de ce problème. On notera x_{ij} le flot circulant sur l'arc (i, j) et F la valeur du flot.

Question 2 : Etant donné $0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$, montrer que si $F > 0$ est maximal alors il existe au moins un arc saturé (c.a.d. $x_{ij} = c_{ij}$).

Question 3 : Montrer que le problème dual associé au problème précédent est celui de la recherche d'une coupe de capacité minimale.

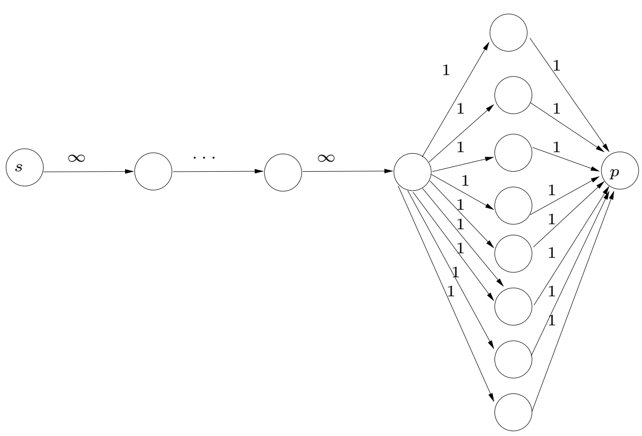
Question 4 : Que devient le théorème de la dualité faible dans ce cadre ?

Question 5 : Interpréter le théorème de la dualité forte.

Exercice 2 : Algorithme du préflot

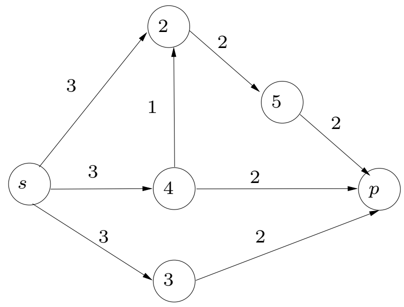
L'objet de cet exercice est d'étudier et d'analyser l'algorithme de préflot dans un réseau de transport. On considère un graphe $G = (S, A)$ avec $|S| = n$, $|A| = m$ et un réseau de transport $R = (G, c)$ dont la source est le sommet s et le puits le sommet p. La fonction c représente la fonction capacité associant à chaque arc (i, j) une capacité réelle $c(i, j)$. Nous supposons que δ représente un flot dans R et que G_δ représente le graphe d'écart associé à δ.

Question 1 : On considère le graphe ci-dessous:



Que peut-on dire de la complexité de l'algorithme des distances estimées au puits ? Que se passerait-il si l'on augmentait le flot en considérant les arcs individuellement et non les chemins augmentants ?

Question 2 **:** Rappeler la définition de l'excès $e_\delta(x)$ d'un sommet x du réseau. Calculer l'excès des sommets du graphe ci-dessous en supposant que les valuations fournies pour les arcs représentent les valeurs des flots sur ces arcs.



On définit un *préflot* f comme une fonction de A dans $\mathbb{R}$ telle que:

1. $e_f(s) \leq 0$,
2. $e_f(p) \geq 0$,
3. $0 \leq f \leq c$ et $\forall x \in S, x \neq s, p$ et $e_f(x) \geq 0$.

Pour un préflot f, le graphe d'écart est noté G_f. La fonction distance estimée au puits Δ et le graphe de compatibilité sont définis de la même façon que dans le cas d'un flot de s à p.

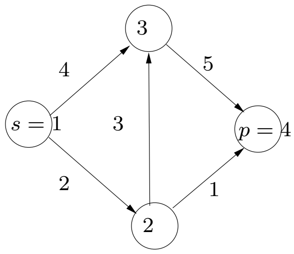
Question 3 **:** Un sommet est dit *actif* si son excès est strictement positif. Donner la liste des sommets actifs pour le réseau fourni à la question précédente.

L'idée de l'algorithme du préflot est de pousser des quantités de flot à partir des sommets actifs vers le puits en utilisant des arcs compatibles. On considère l'algorithme suivant:

---

procédure PREFLOT(G)
Initialiser le flot f à 0;
Pour tout arc u sortant de s faire $f(u) \leftarrow c(u)$;
$\Delta(s) \leftarrow n$; $\Delta(p) \leftarrow 0$;
Initialiser Δ avec les distances exactes pour tous les sommets de G sauf s et p;
tant que l'ensemble des sommets actifs est non vide **faire**
  Choisir un sommet actif i
  si il existe un arc admissible d'origine i
    alors
      Choisir un arc admissible $v = (i, j)$ d'origine i
      Faire circuler $\min\{e_f(i), c(v) - f(v)\}$ unités de flots de i vers j (réduction d'excès)
    sinon
      Remplacer $\Delta(i)$ par $\min\{\Delta(j) + 1, (i, j) \in A$ et $c(i, j) - f(i, j) > 0\}$
  fin si
fin tant que

Question 4 **:** Calculer le flot maximum du graphe suivant en utilisant la procédure `Preflot`.



Question 5 **:** Montrer qu'à chaque étape de l'algorithme, il existe un chemin dans G_f à partir de chaque sommet i tel que $e_f(i) > 0$ vers le sommet s.
Question 6 **:** Pour chaque sommet j avec excès, montrer que $\Delta(j) \leq 2n - 1$.
Question 7 **:** Quel est le nombre maximum d'augmentations de la distance estimée d'un même sommet? En déduire le nombre maximum d'opérations de recalcul de distance.
Question 8 **:** Prouver la terminaison de l'algorithme et en montrer que le résultat est la valeur d'un flot maximum de s à p.
Question 9 **:** Evaluer le nombre de réductions d'excès saturantes.
Question 10 **:** Evaluer le nombre de réductions d'excès non saturantes. On utilisera la fonction *potentiel* définit par $\phi = \sum_{i \in I} \Delta(i)$ avec I ensemble des sommets actifs.
Question 11 **:** En déduire la complexité de l'algorithme `preflot`.

Exercice 3 : Illustration des réductions d'excès non-saturantes

On considère l'application suivante: un compte joint est partagé entre 3 personnes A, B et C.
Le compte dispose d'un dépôt initial d'au plus n^2.
A n'effectue que des retraits d'au moins 1 unité.
B effectue moins que n^2 dépôts. Chaque dépôt a une valeur d'au plus 1 unité.
C effectue moins que nm dépôts et retraits. Chaque dépôt a une valeur d'au plus 1 unité.
Le compte n'est jamais débiteur.
On s'intéresse au nombre maximum de retraits pour la personne A. On considère la fonction ϕ définie précédemment. On considère qu'un dépôt est une augmentation de ϕ et qu'un retrait est une diminution de ϕ.
Question 1 **:** Evaluer le dépôt total issu des réductions d'excès saturantes.
Question 2 **:** Que représente chaque réduction d'excès non-saturante ?
Question 3 **:** Evaluer le dépôt total issu des modifications de distances.
Question 4 **:** En déduire le nombre des réductions d'excès non-saturantes total.