

Programmation linéaire continue

Algorithme du simplexe

Module LI 348
Philippe Chrétienne

Essence brute	PN	RVP	DP
E1	107	5	3,814
E2	93	8	2,666
E3	87	4	4,016
E4	108	21	1,300

Exemple

Une compagnie pétrolière produit 4 types d'essence brute E1, E2, E3 et E4.

Pour chaque essence brute on connaît :

- le taux de performance PN,
- la pression de vapeur RVP,
- la production journalière DP.

La compagnie peut pour chaque essence brute E_i :

- en vendre une partie dans l'état ;
- utiliser le reste pour constituer 2 types de mélange: A et B.

La compagnie peut fabriquer 2 mélanges A et B

Les mélanges A et B ont les caractéristiques suivantes :

	PN	RVP	Prix unitaire
A	≥ 100	≤ 7	6,45
B	≥ 91	≤ 7	5,91

Le PN (resp. RVP) d'un mélange est la **moyenne pondérée** des PN (resp. RVP) de ses constituants.

Le prix unitaire de vente d'une essence brute est 4,83.

Une stratégie possible de la compagnie :

- **Mélanger** 2,666 unités de E1 et 2,666 unités de E2 pour constituer **5,332 unités de A**

(PN du mélange : 100 ; RVP du mélange : 6;5)

- **Mélanger** 1,148 unités de E1, 4,016 unités de E3 et 1,024 unités de E4 pour constituer **6,188 unités de B**

(PN du mélange : 94,2 ; RVP du mélange : 7)

- **Vendre 0,276 unités de E4 brute.**

Le **profit réalisé** est égal à :

$$5,332 \cdot 6,45 + 6,188 \cdot 5,91 + 0,276 \cdot 4,83 = 72,296$$

Problème :

Déterminer une **stratégie de profit maximal.**

Variables :

x_{1A} : quantité de production journalière de **E1** allouée au mélange **A** ;

x_{1B} : quantité de production journalière de **E1** allouée au mélange **B** ;

De même x_{2A} , x_{2B} , x_{3A} , x_{3B} , x_{4A} , x_{4B} .

Contraintes :

1) **Non dépassement des productions journalières.**

$$x_{1A} + x_{1B} \leq 3,814$$

$$x_{2A} + x_{2B} \leq 2,666$$

$$x_{3A} + x_{3B} \leq 4,016$$

$$x_{4A} + x_{4B} \leq 1,300$$

2) **Respect des PN et RVP de A et B :**

$$107 x_{1A} + 93 x_{2A} + 87 x_{3A} + 108 x_{4A} \geq 100(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A})$$

$$\text{soit : } 7 x_{1A} - 7 x_{2A} - 13 x_{3A} + 8 x_{4A} \geq 0$$

$$5 x_{1A} + 8 x_{2A} + 4 x_{3A} + 21 x_{4A} \leq 7(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A})$$

$$\text{soit : } -2 x_{1A} + 1 x_{2A} - 3 x_{3A} + 14 x_{4A} \leq 0$$

$$107 x_{1B} + 93 x_{2B} + 87 x_{3B} + 108 x_{4B} \geq 91(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B})$$

$$\text{soit : } 16 x_{1B} + 2 x_{2B} - 4 x_{3B} + 19 x_{4B} \geq 0$$

$$5 x_{1B} + 8 x_{2B} + 4 x_{3B} + 21 x_{4B} \leq 7(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B})$$

$$\text{soit : } -2 x_{1B} + 1 x_{2B} - 3 x_{3B} + 14 x_{4B} \leq 0$$

3) **Positivité de toutes les variables**

Fonction objectif :

$$\text{Max } 6,45(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A}) + 5,91(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B}) +$$

$$4,83[3,814 - (x_{1A} + x_{1B}) + 2,666 - (x_{2A} + x_{2B}) +$$

$$4,016 - (x_{3A} + x_{3B}) + 1,300 - (x_{4A} + x_{4B})]$$

Soit :

$$\text{Max } 56,97468 + 1,62(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A}) + 1,08(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B})$$

Formes canoniques

Forme canonique d'une **maximisation** :

$$Ax \leq b,$$

$$x \geq 0,$$

$$\text{Max } cx.$$

Forme canonique d'une **minimisation** :

$$Ax \geq b,$$

$$x \geq 0,$$

$$\text{Min } cx.$$

Les éléments de A, b et c sont des nombres **réels** ;

A est une matrice à **m lignes** et **n colonnes** ;

b est un vecteur colonne à **m éléments** ;

c est un vecteur ligne à **n éléments** ;

x est un vecteur colonne de **n variables réelles**.

Si A^j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de A , la forme canonique s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1..n} x_j A^j &\leq b \\ x_j &\geq 0, j=1, \dots, n \\ \text{Max } \sum_{j=1..n} c_j x_j \end{aligned}$$

Si a_{ij} est le terme de A en ligne i et colonne j , la forme canonique s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1..n} a_{ij} x_j &\leq b_i, i=1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, j=1, \dots, n \\ \text{Max } \sum_{j=1..n} c_j x_j \end{aligned}$$

Si A_i est la $i^{\text{ième}}$ ligne de A , la forme canonique s'écrit :

$$\begin{aligned} A_i x &\leq b_i, i=1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, j=1, \dots, n \\ \text{Max } \sum_{j=1..n} c_j x_j \end{aligned}$$

On obtient alors la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x &\geq 0 \\ \text{Max } cx. \end{aligned}$$

Hypothèses :

H1 : $\text{rang}(A) = m$ (i.e: les m lignes de A sont indépendantes) ;

H2 : $b \geq 0$.

L'algorithme (de base) du simplexe prend comme donnée un programme linéaire (noté PL) :

- exprimé sous la forme canonique précédente et
- satisfaisant H1 et H2.

Remarque:

Les hypothèses H1 et H2 seront relâchées par la suite.

Forme canonique avec **variables d'écart** (maximisation) :

$$\begin{aligned} Ax + Is &= b, \\ x &\geq 0, \\ s &\geq 0, \\ \text{Max } cx. \end{aligned}$$

A est une matrice $m \times n$;

I est la **matrice identité** $m \times m$;

x_1, x_2, \dots, x_n sont les variables **principales** ;

s_1, s_2, \dots, s_m sont les variables **d'écart**.

Dans la suite, on **renommera** :

x_{n+i} la variable s_i ;

A la matrice (AI) (m lignes et $n+m$ colonnes)

x le vecteur **colonne** (x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) des $n+m$ variables.

Exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +3 & +1 \\ \hline -1 & & +3 \\ \hline +2 & -1 & +2 \\ \hline +2 & +3 & -1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline \end{array} \leq \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

Forme canonique initiale

+1	+3	+1	+1			
-1		+3		+1		
+2	-1	+2			+1	
+2	+3	-1				+1

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} * \begin{matrix} +3 \\ +2 \\ +4 \\ +2 \end{matrix} = \begin{matrix} +3 \\ +2 \\ +4 \\ +2 \end{matrix}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0.$$

$$\text{Max } 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

Forme canonique de PL avec les **variables d'écart**.

Base primale réalisable.

$B : \{1..m\} \rightarrow \{1..n+m\}$ est une **base primale** si les m colonnes $A^{B(1)}, A^{B(2)}, \dots, A^{B(m)}$ de A sont **indépendantes**.

On note aussi (abus de notation) :

B la matrice carrée $[A^{B(1)} A^{B(2)} \dots A^{B(m)}]$ associée ;

B^{-1} la **matrice inverse** de B .

$A^{B(1)}, A^{B(2)}, \dots, A^{B(m)}$ sont appelées **colonnes de base**.

Les autres colonnes de A sont appelées **colonnes hors-base**.

Remarques importantes:

Soit $j \in \{1..n+m\}$. Posons $E^j = B^{-1} * A^j$. On a donc $A^j = B * E^j$.

E^j est donc le vecteur colonne des coordonnées de A^j sur

$B = \{A^{B(1)}, A^{B(2)}, \dots, A^{B(m)}\}$

Donc, si $B(i) = j$, E^j est le vecteur colonne canonique e_i .

A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7
+1	+3	+1	+1			
-1		+3		+1		
+2	-1	+2			+1	
+2	+3	-1				+1

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} * \begin{matrix} +3 \\ +2 \\ +4 \\ +2 \end{matrix} = \begin{matrix} +3 \\ +2 \\ +4 \\ +2 \end{matrix}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0.$$

$$\text{Max } 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

Exemple :

$B = (A^4, A^5, A^6, A^7)$ est une **base primale** car les 4 colonnes A^4, A^5, A^6, A^7 sont **indépendantes**.

Ici, la matrice carrée associée à B est la matrice identité.

Soit B une **base primale** et soit N une sous-matrice associée aux colonnes hors-base de A . On note :

x_B le vecteur des **variables de base**,

c_B le vecteur des **coûts unitaires des variables de base**,

x_N le vecteur des **variables hors base**,

c_N le vecteur des **coûts unitaires des variables hors base**,

PL s'écrit (**pour la base primale B**) :

$$B x_B + N x_N = b,$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0,$$

$$\text{Max } c_B x_B + c_N x_N$$

ou encore en :

- prémultipliant la première équation par B^{-1} ;

- remplaçant x_B par son expression :

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N,$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0,$$

$$\text{Max } c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N$$

Ecriture de PL pour la base $B = (A^4, A^5, A^6, A^7)$

Pour cette base B , on a $B^{-1}b = (0, 0, 0, 0)$,

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N * x_N,$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x_4 \\ \hline x_5 \\ \hline x_6 \\ \hline x_7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline +3 \\ \hline +2 \\ \hline +4 \\ \hline +2 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +3 & +1 \\ \hline -1 & & +3 \\ \hline +2 & -1 & +2 \\ \hline +2 & +3 & -1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0. \quad x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0,$$

$$\text{Max } 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \quad \text{Max } c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N) x_N$$

Base primale réalisable de PL :

B est une base primale réalisable (en abrégé **BPR**) si $B^{-1}b \geq 0$.

Remarque :

B est dite **dégénérée** si $B^{-1}b$ possède au moins une coordonnée nulle

Si B est une **BPR** de PL, alors le **point** défini par :

$$s_B = B^{-1}b \text{ et } s_N = 0$$

définit une **solution réalisable** de PL appelée

solution de base associée à la base primale réalisable B .

La valeur économique $c_B B^{-1}b$ de cette solution est notée z_B .

Remarques :

1) Le nombre de BPR de PL est **fini** ;

2) Une solution de base de PL possède **au plus m coordonnées strictement positives.**

Ecriture de PL pour la base $B = (A^4, A^5, A^6, A^7)$

$$\begin{array}{|c|} \hline x_4 \\ \hline x_5 \\ \hline x_6 \\ \hline x_7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline +3 \\ \hline +2 \\ \hline +4 \\ \hline +2 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +3 & +1 \\ \hline -1 & & +3 \\ \hline +2 & -1 & +2 \\ \hline +2 & +3 & -1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0.$$

$$\text{Max } 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

B n'est pas dégénérée ;

B est réalisable ;

$s = (0, 0, 0, 3, 2, 4, 2)$ est la solution de base associée à B .

La valeur économique de s est nulle ($z_B=0$)

Définition :

Soit B une BPR de PL :

Les coefficients des variables hors-base dans la fonction économique sont appelés **coûts marginaux** (pour la BPR B).

Propriété :

Si B est une BPR telle que **tous les coûts marginaux sont négatifs ou nuls**, alors la solution de base associée à B est **optimale**.

Preuve:

Dans la base B , PL s'écrit :

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N x_N, \\ x_B &\geq 0, x_N \geq 0, \\ \text{Max } c_B B^{-1}b &+ (c_N - c_B B^{-1}N) x_N \end{aligned}$$

Comme:

- **par hypothèse** : $c_N - c_B B^{-1}N \leq 0$

- **pour toute solution x de PL** : $x_N \geq 0$

alors pour toute solution x de PL on a : $z \geq c_B B^{-1}b$

Pivotage

Nouvelle hypothèse :

H3 : Aucune BPR de PL n'est dégénérée.

Soit B une BPR de PL telle qu'il existe une colonne hors base A^j de coût marginal positif, i.e. telle que: $c_j - c_B B^{-1} A^j > 0$.

Une BP B' de PL est dite voisine de B s'il existe un indice $l \in \{1..m\}$ tel que :

a) pour tout $i \in \{1..m\} \setminus \{l\} : B'(i) = B(i)$

b) $B'(l) = e$ où $e \notin B(\{1..m\})$

Autrement dit B et B' ne diffère que d'une seule colonne.

Propriété fondamentale :

1) Si $B^{-1} A^j \leq 0$, alors pour tout réel $M > 0$, PL possède une solution réalisable de valeur $> M$;

2) Sinon, il existe une BPR B' voisine de B telle que $z_{B'} > z_B$.

Preuve de 1) :

Soit A^j une colonne hors base telle que $B^{-1} A^j \leq 0$

Soit $u > 0$.

Considérons le point y défini par :

$$y_B = s_B - u (B^{-1} A^j),$$

$$y_k = 0 \text{ pour tout } A^k \text{ hors base et } k \neq j,$$

$$y_j = u.$$

Vérifions que y est réalisable pour PL.

Nous avons $y \geq 0$ car $B^{-1} A^j \leq 0$ et $u > 0$.

De plus, comme $N y_N = u A^j$, nous avons : $y_B + B^{-1} N y_N = B^{-1} b$.

Il en résulte que y est réalisable pour PL (quel que soit $u > 0$).

La valeur économique de a solution y est égale à : $c_B y_B + c_N y_N$,

Comme : $y_B = s_B - u (B^{-1} A^j)$,

$$y_k = 0 \text{ pour tout } A^k \text{ hors base et } k \neq j,$$

$$y_j = u.$$

cette valeur est égale à : $z_B + (c_j - c_B B^{-1} A^j) u$.

Comme $c_j - c_B B^{-1} A^j > 0$,

en choisissant u suffisamment grand,

il existe une solution réalisable de PL de valeur $> M$.

Lemme préliminaire :

Soit $j \notin B(\{1..m\})$.

Soit $(B^{-1} A^j)_s$ la coordonnée de A^j sur le vecteur $A^{B(s)}$.

Si $(B^{-1} A^j)_s \neq 0$, alors la matrice B' obtenue en posant

$B'(s) = j$ et $B'(i) = B(i)$ pour $i \in \{1..m\} \setminus \{s\}$

est une base voisine de B (non nécessairement réalisable).

Preuve du Lemme.

Il suffit de montrer que B' est une base.

Soit $E^j = B^{-1} A^j$. Par hypothèse on a $E^j_s \neq 0$.

Or on a : $A^j = \sum_{i \in \{1..m\} \setminus \{s\}} E^j_i A^{B(i)} + E^j_s A^{B(s)}$.

Supposons que $\sum_{i \in \{1..m\} \setminus \{s\}} \alpha_i A^{B(i)} + \alpha_j A^j = 0$.

En remplaçant A^j , il vient :

$$\alpha_j E^j_s A^j + \sum_{i \in \{1..m\} \setminus \{s\}} (\alpha_i + \alpha_j E^j_i) A^{B(i)} = 0.$$

Comme B est une base et $E^j_s \neq 0$, il en résulte que :

$$\alpha_j = 0 \text{ et pour tout } i \in \{1..m\} \setminus \{j\} : \alpha_i = 0.$$

Preuve de 2).

Soit A^j une colonne hors base telle que $B^{-1}A^j$ n'est pas ≤ 0 ;

Soit $\text{Pos}(A^j)$ l'ensemble des lignes k telles que $(B^{-1}A^j)_k > 0$;

Soit $u > 0$.

Considérons le point $y(u)$ défini par :

$$y_{B(i)} = (B^{-1}b)_i - u (B^{-1}A^j)_i, \quad i=1..m$$

$$y_k = 0 \text{ pour tout } A^k \text{ hors base et } k \neq j,$$

$$y_j = u.$$

Cherchons le plus grand u tel que y soit réalisable.

y est réalisable pour PL si et seulement si :

$$\text{pour tout } k \in \text{Pos}(A^j), \quad B^{-1}b - B^{-1}A^j u \geq 0.$$

La plus grande valeur u^* de u est donc :

$$u^* = \text{Min}_{k \in \text{Pos}(A^j)} \{(B^{-1}b)_k / (B^{-1}A^j)_k\}$$

Supposons que $u^* = (B^{-1}b)_s / (B^{-1}A^j)_s$.

Soit B' la base obtenue (Lemme préliminaire) en posant :

$$B'(s) = j \text{ et } B'(i) = B(i) \text{ pour } i \in \{1..m\} \setminus \{s\}$$

Soit y^* le point $y(u^*)$.

Le point y^* satisfait :

$$\text{- pour toute ligne } i \neq s : y_{B'(i)}^* = y_{B(i)}^* > 0 ;$$

$$\text{- pour la ligne } s : y_{B(s)}^* = 0 ; y_{B'(s)}^* = y_j^* = u^* > 0 ;$$

$$\text{- pour tout indice } k \text{ hors-base pour } B' : y_k^* = 0.$$

Comme la solution de base associée à B' est obtenue de manière unique en annulant les variables hors base, cette solution est égale à y^* .

Remarque :

Comme B' n'est pas dégénérée (hypothèse H3), l'indice s définissant u^* est unique.

Comme le point y^* est défini par :

$$y_{B(i)} = (B^{-1}b)_i - u^* (B^{-1}A^j)_i, \quad i=1..m$$

$$y_k = 0 \text{ pour tout } A^k \text{ hors base et } k \neq j,$$

$$y_j = u^*.$$

la valeur économique de la solution y^* est égale à

$$c_B B^{-1}b - u^* c_B B^{-1}A^j + c_j u^*,$$

soit encore :

$$z_B + u^* (c_j - c_B B^{-1}A^j).$$

Comme :

$$u^* > 0 \text{ (hypothèse H3)}$$

$$c_j - c_B B^{-1}A^j > 0 \text{ (hypothèse),}$$

on a : $z_{B'} > z_B$.

0	+5x ₁	+5x ₂	+3x ₃					=	z
A ⁴	+x ₁	+3x ₂	+x ₃	+x ₄				=	3
A ⁵	-x ₁		+3x ₃		+x ₅			=	2
A ⁶	+2x ₁	-x ₂	+2x ₃			+x ₆		=	4
A ⁷	+2x ₁	+3x ₂	-x ₃				+x ₇	=	2

BPR initiale : $B_0 = \{A^4, A^5, A^6, A^7\}$

Colonne hors base 'entrante' A^1 (en rouge)

$$\text{Pos}(A^1) = \{1, 3, 4\}$$

Colonne de base 'sortante' : A^7 (en bleu)

$$\text{BPR voisine } B_1 = \{A^4, A^5, A^6, A^1\}$$

+5		$-5/2x_2$	$11/2x_3$				$-5/2x_7$	=	z
A ⁴		$3/2x_2$	$3/2x_3$	x_4			$-1/2x_7$	=	2
A ⁵		$3/2x_2$	$5/2x_3$		x_5		$1/2x_7$	=	3
A ⁶		$-4x_2$	$+3x_3$			x_6	$-x_7$	=	2
A ¹	x_1	$3/2x_2$	$-1/2x_3$				$1/2x_7$	=	2

BPR : $B_1 = \{A^4, A^5, A^6, A^1\}$
 Colonne hors base 'entrante' A^3 .
 $\text{Pos}(A^1) = \{1, 2, 3\}$
 Colonne de base 'sortante' : A^6 .
 BPR voisine $B_2 = \{A^4, A^3, A^5, A^1\}$

26/3		$29/6x_2$				$-11/6x_6$	$-5/2x_7$	=	z
A ⁴		$7/2x_2$		x_4		$-1/2x_6$	$-1/2x_7$	=	1
A ⁵		$29/6x_2$			x_5	$-5/6x_6$	$1/2x_7$	=	4/3
A ³		$-4/3x_2$	x_3			$1/3x_6$	$-1/3x_7$	=	2/3
A ¹	x_1	$5/6x_2$				$1/6x_6$	$1/3x_7$	=	4/3

BPR : $B_2 = \{A^4, A^5, A^3, A^1\}$
 Colonne hors base 'entrante' A^2 .
 $\text{Pos}(A^2) = \{1, 2, 4\}$
 Colonne de base 'sortante' : A^5 .
 BPR voisine $B_3 = \{A^4, A^2, A^3, A^1\}$

+10					$-x_5$	$-x_6$	$-2x_7$	=	z
A ⁴				x_4	$21/29x_5$	$3/29x_6$	$-28/29x_7$	=	1/29
A ²		x_2			$6/29x_5$	$-5/29x_6$	$8/29x_7$	=	8/29
A ³			x_3		$8/29x_5$	$3/29x_6$	$1/29x_7$	=	30/29
A ¹	x_1				$-5/29x_5$	$9/29x_6$	$3/29x_7$	=	32/29

BPR : $B_3 = \{A^4, A^2, A^3, A^1\}$
 Solution de base associée optimale.

Algorithme A0

Sous **H1, H2 et H3**,
A0 détermine une solution de base optimale de PL.

Algorithme A0(PL) ;

Pour i de 1 à m faire B(i) := n+i ;

Répéter

Soit s la solution de base associée à la base B ;

Soit N une sous-matrice des colonnes hors-base pour B ;

Si $(c_N - c_B B^{-1}N) \leq 0$ alors Retourner(s) ;

Soit A^j une colonne de N telle que $(c_j - c_B B^{-1}A^j) > 0$;

Si $B^{-1}A^j \leq 0$ alors Retourner('valeur de PL infinie') ;

Soit P = {k ∈ 1..m / $(B^{-1}A^j)_k > 0$ }

Soit s ∈ 1..m tel que: $(B^{-1}b)_s / (B^{-1}A^j)_s = \text{Min}_{k \in P} \{(B^{-1}b)_k / (B^{-1}A^j)_k\}$

B(s) := j ;

FinRépéter.

Validation de A0 :

La suite des valeurs z_B étant strictement croissante, les PBR de PL construites par A0 sont toutes distinctes.

Il en résulte que l'algorithme se termine.

Lors de la terminaison :

- soit A0 retourne 'La valeur de PL est infinie' (ligne 6.);
- soit A0 retourne une solution optimale de PL qui est la solution de base associée à la dernière BPR examinée (ligne 4.).

Dégénérescence et cyclage

Relaxons l'hypothèse H3.

Soit B une BPR de PL dégénérée.

Supposons qu'il existe une colonne hors base A^j de coût marginal strictement positif.

Si $\text{Pos}(A^j)$ contient au moins un indice s tel que :

$$(B^{-1}b)_s = 0 \text{ et } (B^{-1}A^j)_s > 0$$

la nouvelle base B' est telle que :

$$1) (s_{B'}, s_{N'}) = (s_B, s_N)$$

$$2) z_{B'} = z_B.$$

La terminaison de A0 n'est donc plus garantie.

A0 peut réexaminer une BPR déjà examinée.

C'est le phénomène de cyclage.

La dégénérescence est un phénomène relativement fréquent.

Elle est courante pour certains types de problèmes, par exemple les problèmes de transport où la matrice A est la matrice d'incidence (sommets, arcs) d'un graphe.

Le phénomène de cyclage ne s'est jamais produit pour des problèmes pratiques.

Par contre, des problèmes ad-hoc produisant un cyclage ont été construits.

Le programme A0 peut être transformé en un algorithme valide A1 de plusieurs manières.

La règle de Bland (1977) est l'une de ces variantes :

- 1) Choisir la colonne hors base entrante A^j de plus petit indice ;
- 2) Choisir la colonne de base sortante A^s de plus petit indice.

Initialisation, incompatibilité et dépendance des contraintes.

Dans la suite :

- nous conservons l'hypothèse H3 (pas de bases dégénérées);
- nous relaxons l'hypothèse H2 ($b \geq 0$).

Si b n'est pas positif ou nul, la base B définie par :

$B(i) := n+i$ n'est plus une BPR initiale pour A0.

Nous allons construire à partir de PL un programme linéaire auxiliaire PLA.

L'exécution de A0 pour PLA permettra soit de :

- conclure que PL n'a pas de solution réalisable ;
- déterminer une BPR initiale de PL.

Soit PL le programme linéaire :

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$\text{Max } cx$$

Définissons le programme linéaire auxiliaire PLA en introduisant une **variable supplémentaire** x_0 appelée **variable artificielle** :

$$Ax - x_0U \leq b$$

$$x \geq 0, x_0 \geq 0$$

$$\text{Min } x_0$$

où $U = (1, 1, \dots, 1)$.

Propriétés de PLA :

- 1) PLA est compatible ;
- 2) La valeur de PLA est finie ;
- 3) Les solutions de PL sont en bijection avec les solutions de PLA telles que $x_0=0$.

-5	-2x ₁	+3x ₂	-x ₃		-x ₅			=	w
A ⁴		+2x ₂	+x ₃	+x ₄	-x ₅			=	9
A ⁰	-2x ₁	+3x ₂	-x ₃		-x ₅		x ₀	=	5
A ⁶	-3x ₁	+4x ₂	-3x ₃		-x ₅	+x ₆		=	4

Le premier pivotage.

La base B₁ est une **BPR de PLA**.

PL initial

+2x ₁	-x ₂	+2x ₃	≤	4
+2x ₁	-3x ₂	+x ₃	≤	-5
-x ₁	+x ₂	-2x ₃	≤	-1

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } x_1 - x_2 + x_3$$

Le programme PLA avec variables d'écart et variable artificielle.
Base B₀ de PLA (**non réalisable**)

0							-x ₀	=	w
A ⁴	+2x ₁	-x ₂	+2x ₃	+x ₄			-x ₀	=	4
A ⁵	+2x ₁	-3x ₂	+x ₃		+x ₅		-x ₀	=	-5
A ⁶	-x ₁	+x ₂	-2x ₃			+x ₆	-x ₀	=	-1

Résolution de PLA.

Ecrivons PLA sous la forme canonique d'une maximisation avec les variables d'écart notées $e_i, i=1, 2, \dots, m$:

$$-x_0U + Ax + Ie = b$$

$$x \geq 0, x_0 \geq 0, e \geq 0$$

$$- \text{Max } -x_0$$

Notons A' la matrice des contraintes.

Notons :

A'^0 la colonne associée à la variable artificielle x_0 ;

A'^1, A'^2, \dots, A'^n les colonnes associées aux variables principales;

$A'^{n+1}, A'^{n+2}, \dots, A'^{n+m}$ les colonnes associées aux variables d'écart.

Soit B_0 la base (non réalisable) définie par :
 $B_0(i) = n+i$ pour $i = 1..m$.

Soit $b_s = \text{Min}\{b_i \mid i=1,..,m\}$ ($b_s < 0$)

Considérons la base B_1 , voisine de B_0 , obtenue par :
 $B_1(i) = B_0(i)$ pour $i \in 1..m$ et $i \neq s$
 $B_1(s) = 0$.

Après le pivotage, la ligne i s'écrit :

$$x_0 - \sum_{j=1,..,n} a_{sj} x_j - x_{n+s} = -b_s \quad \text{pour } i = s ,$$
$$x_{n+i} + \sum_{j=1,..,n} (a_{ij} - a_{sj}) x_j - x_{n+s} = b_i - b_s \quad \text{pour } i \neq s$$

Il en résulte que B_1 est une BPR de PLA.

Soit B^* la BPR de PLA fournie par A0.
Soit x_0^* la valeur optimale de PLA associée.

3 cas sont possibles :

1) x_0^* est strictement positive.

Dans ce cas, PL n'a pas de solution réalisable.

2) $x_0^* = 0$ et la colonne artificielle est hors base.

Dans ce cas, B^* est une BPR de PL.

3) $x_0^* = 0$ et la colonne artificielle U est en base (B^* dégénérée) ;

Deux sous-cas se présentent alors :

a) pour toute colonne A^j hors base, la coordonnée de $(B^*)^{-1} A^j$ sur U est nulle.

Dans ce cas on aurait : $\text{rang}(A) < m$, ce qui contredit H3.

b) il existe une colonne A^j hors base telle que la coordonnée de $(B^*)^{-1} A^j$ sur la colonne artificielle de base U est non nulle..

Dans ce cas, le pivotage obtenu en faisant :

- sortir A^0 de la base ,
- entrer A^j en base

permet d'obtenir une BPR de PL.

Remarque :

Si H3 est relaxée, la résolution de PLA permet de déterminer si les contraintes de PL sont indépendantes ou non (sortie par la sous-cas b)).