

Dualité en Programmation Linéaire

Module LI 348
Philippe Chrétienne

Bornes supérieures de la valeur optimale.

Exemple :
Considérons le PL (forme canonique d'un Max)

	$4x_1$	$+ x_2$	$+5x_3$	$+3x_4$	$=$	Max z
C1	x_1	$- x_2$	$- 5x_3$	$+3x_4$	\leq	1
C2	$5x_1$	$+ x_2$	$+3x_3$	$+8x_4$	\leq	55
C3	$-x_1$	$+ x_2$	$+3x_3$	$-5x_4$	\leq	3
	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	$x_4 \geq 0$		

Sans le résoudre, déterminons des bornes de la valeur optimale z^* de PL.

Chaque solution réalisable induit une borne inférieure.

Par exemple :

$(0,0,1,0)$ induit $z^* \geq 5$;

$(3,0,2,0)$ induit $z^* \geq 22$.

	$4x_1$	$+ x_2$	$+5x_3$	$+3x_4$	$=$	Max z
C1	x_1	$- x_2$	$- 5x_3$	$+3x_4$	\leq	1
C2	$5x_1$	$+ x_2$	$+3x_3$	$+8x_4$	\leq	55
C3	$-x_1$	$+ x_2$	$+3x_3$	$-5x_4$	\leq	3
	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	$x_4 \geq 0$		

Pour trouver une borne supérieure de z^* , on cherche une combinaison linéaire à coefficients positifs des contraintes qui majore la fonction économique pour toute solution réalisable du PL.

Max	$4x_1$	$+ x_2$	$+5x_3$	$+3x_4$		
C1	x_1	$- x_2$	$- 5x_3$	$+3x_4$	\leq	1
C2	$5x_1$	$+ x_2$	$+3x_3$	$+8x_4$	\leq	55
C3	$-x_1$	$+ x_2$	$+3x_3$	$-5x_4$	\leq	3
	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	$x_4 \geq 0$		

Exemples :

1) en multipliant C2 par $5/3$, on a pour tout (x_1, x_2, x_3, x_4) réalisable : $(25/3)x_1 + (5/3)x_2 + 5x_3 + (40/3)x_4 \leq (275/3)$ d'où $z^* \leq (275/3)$

2) en sommant C2 et C3, on a pour tout (x_1, x_2, x_3, x_4) réalisable : $4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$ d'où $z^* \leq 58$.

Max	$4x_1$	$+x_2$	$+5x_3$	$+3x_4$		
C1	$+x_1$	$-x_2$	$-5x_3$	$+3x_4$	\leq	1
C2	$+5x_1$	$+x_2$	$+3x_3$	$+8x_4$	\leq	55
C3	$-x_1$	$+x_2$	$+3x_3$	$-5x_4$	\leq	3
	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	$x_4 \geq 0$		

Généralisation :

Pour obtenir une **borne supérieure de z^*** du type précédent, on cherche des coefficients (≥ 0) y_1, y_2, y_3 associés respectivement à C1, C2 et C3 tels que :

		4	+1	+5	+3
		\geq	\geq	\geq	\geq
C1	$y_1 \geq 0$	$+y_1$	$-y_1$	$-5y_1$	$+3y_1$
C2	$y_2 \geq 0$	$+5y_2$	$+y_2$	$+3y_2$	$+8y_2$
C3	$y_3 \geq 0$	$-y_3$	$+y_3$	$+3y_3$	$-5y_3$
		D1	D2	D3	D4

Si on cherche à déterminer la **meilleure borne supérieure de ce type**, il faut résoudre le **programme linéaire** :

	4	+1	+5	+3	Min w
	\geq	\geq	\geq	\geq	=
$y_1 \geq 0$	$+y_1$	$-y_1$	$-5y_1$	$+3y_1$	$+y_1$
$y_2 \geq 0$	$+5y_2$	$+y_2$	$+3y_2$	$+8y_2$	$+55y_2$
$y_3 \geq 0$	$-y_3$	$+y_3$	$+3y_3$	$-5y_3$	$+3y_3$
	D1	D2	D3	D4	

Ce programme linéaire, noté **PL^D**, est appelé **programme dual** du programme linéaire initial PL.

Si y_1, y_2, y_3 satisfont les contraintes du tableau précédent, alors pour toute **solution réalisable** (x_1, x_2, x_3, x_4) de PL, on a :

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq$$

$$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + y_3)x_2 + (-5y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \leq$$

$$3y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

$3y_1 + 55y_2 + y_3$ est donc une borne supérieure de z^* .

Plus généralement, soit le programme linéaire PL :

$$\begin{aligned} Ax &\leq b, \\ x &\geq 0, \\ \text{Max } z &= cx. \end{aligned}$$

Si, pour chaque ligne A_i de A, on trouve des valeurs y_i telles que le **vecteur ligne** $y = (y_1, \dots, y_m)$ satisfait :

$$\begin{aligned} yA &\geq c, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

alors pour tout **vecteur colonne** $x = (x_1, \dots, x_n) \geq 0$, on a :

$$yAx \geq cx$$

Si x est une solution quelconque de PL :

$$\text{on a : } yb \geq yAx \geq cx$$

yb est donc une **borne supérieure de z^*** .

on cherche donc à trouver y tel que **yb soit minimum**.

Le problème dual

Soit PL défini par :

Max	c_1x_1	c_2x_2	...	c_nx_n		
C1	$a_{11}x_1$	$a_{12}x_2$		$a_{1n}x_n$	\leq	b_1
Cm	$a_{m1}x_1$	$a_{m2}x_2$		$a_{mn}x_n$	\leq	b_m
	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$		$x_n \geq 0$		

PL^D est défini par :

	c_1	c_2		c_n	Min w
	\geq	\geq		\geq	$=$
$y_1 \geq 0$	$a_{11}y_1$	$a_{12}y_1$		$a_{1n}y_1$	b_1y_1
$y_m \geq 0$	$a_{m1}y_m$	$a_{m2}y_m$		$a_{mn}y_m$	b_my_m
	D1	D2		Dn	

Ecriture matricielle de PL et PL^D.

A est une matrice à m lignes et n colonnes ;
 c est un vecteur ligne à n coefficients ;
 b est un vecteur colonne à m coefficients ;
 x est un vecteur colonne à n variables ;
 y est un vecteur ligne à m variables.

$$\begin{array}{l} Ax \leq b, \\ \text{PL : } x \geq 0 \\ \text{Max } cx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} yA \geq c, \\ \text{PL}^D : y \geq 0 \\ \text{Min } yb \end{array}$$

Propriété :
 (PL^D)^D = PL

Propriété faible de la dualité :

Soit x est une solution réalisable de PL ;
 soit y une solution réalisable de PL^D ;
 alors $cx \leq by$.

Corollaire 1 :

Soit x (resp. y) une solution réalisable de PL (resp. PL^D)
 telles que $cx = by$.
 Alors x est optimale pour PL et y est optimale pour PL^D.

Corollaire 2 :

Si PL (resp. PL^D) n'est pas borné, alors PL^D (resp. PL) n'a pas de solution réalisable.

Théorème de la dualité

Enoncé du théorème :

Si PL possède une solution optimale x^* , alors PL^D possède une solution optimale y^* et $cx^* = y^*b$.

Propriété préliminaire (preuve en exercice TD):

Si PL possède une solution optimale x^* , alors PL possède aussi une solution de base optimale.

Preuve du théorème de la dualité:

Supposons que PL soit écrit sous sa forme canonique avec les variables d'écart x_{n+i} , $i=1..m$ (la matrice $[A^{n+1}, A^{n+2}, \dots, A^{n+m}]$ est la matrice identité):

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ \text{PL : } x \geq 0 \\ \text{Max } cx \end{array}$$

Soit B une **base primale optimale**.

PL s'écrit dans cette base :

$$x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1} b,$$

$$x_B, x_N \geq 0$$

$$\text{Max } c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N$$

B est la matrice des colonnes de base ;
 N est la matrice des colonnes hors-base ;
 x_B (x_N) est le vecteur-colonne des variables de base (hors-base) ; ;
 c_B (c_N) est le vecteur-ligne des coefficients des variables de base (hors-base) de la fonction économique ;
 B^{-1} est la matrice inverse de B.

Propriété 2 :

Soit $x_j, j \in \{1..n\}$ une **variable principale**.
 Si x_j est **hors base** pour B, alors $-(c_j - y A^j) \geq 0$ (B est optimale)
 Si x_j est **de base** pour B, alors $-(c_j - y A^j) = 0$ car $E^j = B^{-1} A^j$
 est la colonne canonique de la décomposition de A^j sur les colonnes de B.

y est donc une solution réalisable pour PL^D.

Valeur de la solution y de PL^D.

La valeur de y est **y b**, soit $c_B B^{-1} b$.
 Elle est donc égale à la valeur de la solution de base de PL associée à la base optimale B.

Le théorème de la dualité est donc démontré.

Conséquence :

Les coûts marginaux des variables d'écart d'une base optimale B de PL constituent (au signe près) une **solution optimale de PL^D**.

Nous montrons que le vecteur-ligne y défini par :
 $\forall i \in \{1, \dots, m\} : y_i = -(c_{n+i} - c_B B^{-1} A^{n+i})$
 est une **solution optimale** de PL^D.

A^{n+i} est la colonne (canonique) de A associée à la variable d'écart x_{n+i} , i.e : $A^{n+i} = {}^t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Propriété 1 :

- 1) Si x_{n+i} est une **variable de base**, alors $y_i = 0$.
 En effet, $E^{n+i} = B^{-1} A^{n+i}$ est la colonne canonique de la décomposition de A^{n+i} sur les colonnes de B.
 Il en résulte que $c_B B^{-1} A^{n+i} = c_{n+i}$ et donc que $y_i = 0$.
- 2) Si x_{n+i} est une **variable hors base**, alors $y_i \geq 0$.
- 3) Pour tout i de 1 à m : $c_{n+i} = 0$ et donc $y = c_B B^{-1}$.

Les **contraintes de positivité** sont donc satisfaites par y.

Exemple :

Considérons les programmes PL et PL^D suivants :

PL

	$4x_1$	$+ x_2$	$+5x_3$	$+3x_4$	=	Max z
C1	$+x_1$	$- x_2$	$- 5x_3$	$+3x_4$	\leq	1
C2	$+5x_1$	$+ x_2$	$+3x_3$	$+8x_4$	\leq	55
C3	$-x_1$	$+ x_2$	$+3x_3$	$-5x_4$	\leq	3
	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	$x_4 \geq 0$		

PL^D

		4	+ 1	+5	+3	Min w
		\geq	\geq	\geq	\geq	=
C1	$y_1 \geq 0$	$+y_1$	$- y_1$	$-5y_1$	$+3y_1$	$+y_1$
C2	$y_2 \geq 0$	$+5y_2$	$+ y_2$	$+3y_2$	$+8y_2$	$+55y_2$
C3	$y_3 \geq 0$	$-y_3$	$+ y_3$	$+3y_3$	$-5y_3$	$+3y_3$
		D1	D2	D3	D4	

Ecriture de PL dans la base optimale $\{A^2, A^4, A^6\}$:

29				$-1x_1$	$-2x_3$	$-11x_5$	$-6x_7$	=	Max z
A^2	x_2			$+2x_1$	$+4x_3$	$+5x_5$	$+3x_7$	=	14
A^4		x_4		$+1x_1$	$+1x_3$	$+2x_5$	$+1x_7$	=	5
A^6			x_6	$-5x_1$	$-9x_3$	$-21x_5$	$-11x_7$	=	1

A partir de ce tableau, on lit **directement** une solution optimale de PL^D :

$$y_1 = -(\text{coût marginal de } x_5) = 11 ;$$

$$y_2 = -(\text{coût marginal de } x_6) = 0 ;$$

$$y_3 = -(\text{coût marginal de } x_7) = 6$$

Ecart compleméntaires

Le **théorème des écarts complémentaires** est un corollaire du théorème de la dualité.

Considérons la forme canonique de PL :

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ \text{PL : } x &\geq 0 \\ \text{Max } cx & \end{aligned}$$

Théorème des écarts complémentaires :

Soit x une solution réalisable de PL ;

Soit y une solution réalisable de PL^D ;

x et y sont **optimales si et seulement si** :

1) pour tout j de 1 à n : $x_j > 0 \Rightarrow yA^j = c_j$

2) pour tout i de 1 à m : $y_i > 0 \Rightarrow A_i x = b_i$.

Preuve du théorème :

1) **Condition nécessaire.**

Supposons que x et y soient optimales.

D'après le théorème de la dualité, on a : $cx = yb$.

Comme $Ax \leq b$, $yA \geq c$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a :

$$cx \leq yAx \leq yb.$$

Il en résulte que : $cx = yAx = yb$.

Comme $x \geq 0$, $(c-yA)x = 0$ et $yA \geq c$, la condition 2) est satisfaite.

Comme $y \geq 0$, $y(Ax-b) = 0$ et $Ax \leq b$, la condition 1) est satisfaite.

Condition suffisante.

Si les conditions 1) et 2) sont satisfaites, on a $(c-yA)x = 0$

et $y(Ax-b) = 0$. Il en résulte que $cx=yb$.

Comme x et y sont réalisables, il résulte du **théorème faible de la dualité** qu'elles sont optimales.

Corollaire du théorème (preuve exercice TD):

Soit x une **solution réalisable** de PL.

x est **optimale** si et seulement si il existe une solution y au système suivant :

$$\begin{aligned} yA &\geq c, \\ y &\geq 0, \\ yA_j &= c_j \text{ si } x_j > 0, \\ y_i &= 0 \text{ si } A_i x < b_i. \end{aligned}$$

Interprétation économique

Considérons le programme linéaire PL écrit sous forme canonique pour une maximisation :

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ \text{Max } z &= cx. \end{aligned}$$

Interprétation économique des paramètres de PL :

- m : nombre de types de **ressources** ;
- n : nombre de types de **produits** ;
- a_{ij} : quantité de ressource i **consommée** par une unité de produit j ;
- b_i : quantité **disponible** de ressource i ;
- c_j : **profit unitaire net** (en euros par ex.) pour une unité de produit j ;
- x_j : variable de décision : **production** en produit de type j.

Supposons que l'on envisage d'augmenter la disponibilité en ressource de type i .

Quel prix unitaire pour une unité supplémentaire de ressource de type i est-on prêt à payer ?

« Dimension » économique des variables duales.

Une contrainte de PL^D s'écrit : $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$.
La dimension de y_i est donc en **euros/(unité de ressource i)**.

Le théorème suivant montre que :

si l'**augmentation** en ressource i reste **limitée**,

alors la **réponse** à la question est y_i^* ,

où y_i^* est la valeur optimale de la variable y_i d'une solution optimale de PL^D.

Théorème (preuve exercice TD):

Si PL a au moins une **base optimale non dégénérée**,

il existe un $\varepsilon > 0$ **suffisamment petit** tel que :

si $|\delta_i| \leq \varepsilon$ pour i de 1 à m,

le programme linéaire PL(δ) défini par :

$$\begin{aligned} Ax &\leq b + \delta \\ x &\geq 0 \\ \text{Max } z &= cx. \end{aligned}$$

admet une solution optimale de valeur : $z^* + y^*\delta$

où :

z^* est la **valeur optimale de PL**

y^* est une **solution optimale de PL^D**.

Exemple :

Un propriétaire forestier dispose de 100 hectares d'une forêt qui **peut être abattue (en totalité ou en partie)**.

Deux stratégies S1 et S2 s'offrent à lui à l'**abattage**:

S1 : **Abattre et laisser la forêt se reconstituer**

induit un coût immédiat de 100 euros par hectare et un revenu futur de 500 euros par hectare ;

S2 : **Abattre et replanter**

induit un coût immédiat de 500 euros par hectare et un revenu futur de 1200 euros par hectare.

Il dispose immédiatement de 40000 euros.

Soit x_1 (x_2) le nombre hectares affectés à S1 (S2),
le PL suivant lui fournit une solution optimale :

	$400x_1$	$+700x_2$	=	Max z
C1	$+x_1$	$+x_2$	\leq	100
C2	$100x_1$	$+500x_2$	\leq	40000
	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$		

La solution optimale est :

6.25			$-325x_3$	$-0.75x_4$	=	Max z
C1	x_1		$+(5/4)x_3$	$(-1/400)x_4$	=	25
C2		x_2	$(1/4)x_3$	$(1/400)x_4$	=	75

- S'il emprunte 1000 euros supplémentaires et doit rembourser 1800 euros plus tard, la gestion de la forêt lui rapportera 0.75×1000 euros supplémentaires et globalement il sera perdant.
- S'il consacre 1000 euros de son budget à un autre projet qui lui rapportera plus tard 1800 euros, il sera gagnant.