

Module LI348 : partiel juin 2006.

Durée 1h30. Documents non autorisés.

Exercice 1 (20 points)

On considère le système d'inégalités $I(A, b)$ défini par :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i & i \in \{1, \dots, m\} \\ x_j \geq 0 & j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

où :

- les coefficients a_{ij} et b_i sont réels ;
- les x_j sont des variables réelles positives.

On note A la matrice à m lignes et n colonnes de terme général a_{ij} et $S(A, b)$ l'ensemble des solutions de $I(A, b)$.

L'objet de l'exercice est de montrer la propriété (F) suivante :
 $S(A, b)$ est vide si et seulement si il existe (u_1, \dots, u_m) tel que :

$$\begin{cases} u_i \geq 0 & i \in \{1, \dots, m\} \\ \sum_{i=1}^m u_i a_{ij} \geq 0 & j \in \{1, \dots, n\} \\ \sum_{i=1}^m u_i b_i < 0 \end{cases}$$

On note $PL(A, b)$ le programme linéaire défini par :

$$\begin{cases} -\max -t \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - t \leq b_i & i \in \{1, \dots, m\} \\ x_j \geq 0 & j \in \{1, \dots, n\} \\ t \geq 0 \end{cases}$$

où t est une variable réelle positive.

Question 1 (3/20) — Démontrer que l'ensemble des solutions de $PL(A, b)$ n'est pas vide.

Question 2 (3/20) — Démontrer que $S(A, b)$ est vide si et seulement si la valeur optimale de $PL(A, b)$ est strictement positive.

Question 3 (3/20) — Déterminer le programme linéaire dual $D(A, b)$ de $PL(A, b)$.

Question 4 (2/20) — Démontrer que si la valeur optimale de $D(A, b)$ est strictement positive alors il existe (u_1, \dots, u_m) tel que :

$$\begin{cases} u_i \geq 0 & i \in \{1, \dots, m\} \\ \sum_{i=1}^m u_i a_{ij} \geq 0 & j \in \{1, \dots, n\} \\ \sum_{i=1}^m u_i b_i < 0 \end{cases}$$

Question 5 (3/20) — Démontrer que s'il existe (u_1, \dots, u_m) tel que :

$$\begin{cases} u_i \geq 0 & i \in \{1, \dots, m\} \\ \sum_{i=1}^m u_i a_{ij} \geq 0 & j \in \{1, \dots, n\} \\ \sum_{i=1}^m u_i b_i < 0 \end{cases}$$

alors la valeur optimale de $D(A, b)$ est strictement positive.

Question 6 (1/20) — En déduire que la propriété (F) est vraie.

Question 7 (5/20) — On considère le système $I(A, b)$ défini par :

$$\begin{cases} (i) & x_1 & & \leq 1 \\ (ii) & & x_2 & \leq 1 \\ (iii) & x_1 & - & x_2 \leq -3/2 \\ (iv) & x_1 & +4 & x_2 \leq 2 \\ (v) & x_1 & & \geq 0 \\ (vi) & & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

On considère le programme linéaire :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m u_i b_i \\ u_i \geq 0 & i \in \{1, \dots, m\} \\ \sum_{i=1}^m u_i a_{ij} \geq 0 & j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

obtenu en associant respectivement les variables duales u_1, u_2, u_3 et u_4 aux contraintes (i), (ii), (iii) et (iv).

Ecrire ce programme et l'exprimer par rapport à la base $\{u_1, u_3\}$.

En déduire que pour tout $\lambda > 0$, $u_1 = 3\lambda, u_2 = 0, u_3 = 4\lambda, u_4 = \lambda$ est une solution réalisable.

Que peut-on en déduire pour $S(A, b)$?